

## DIDACTIGRAMAS MATEMATICOS

Pedro Gómez

---

### RESUMEN

Los Didactigrama Matemáticos son una serie de materiales educativos computarizados diseñados para atender problemas específicos en la enseñanza de esta disciplina a estudiantes que no son matemáticos. El artículo presenta el contexto para el cual se desarrollaron los primeros prototipos; la filosofía general detrás del proyecto; una descripción de los primeros prototipos; los principales puntos a que dio lugar la reflexión posterior; y los planes que se tienen para el futuro en este campo.

### Marco de referencia

Durante el segundo semestre de 1989, "una empresa docente", centro de investigación en docencia adscrito al Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes, inició el proyecto Didactigrama Matemáticos bajo el auspicio de la corporación Apple y con la colaboración del Departamento de Sistemas y Computación, el programa de Artes y el programa Hermes de la Universidad de Los Andes. Este proyecto pretendía inicialmente desarrollar un conjunto de programas de computador para complementar las herramientas metodológicas que se venían utilizando en los cursos "Matemáticas, Ciencia, Sociedad" y "Matemáticas, Azar, Sociedad", siendo estos los dos primeros cursos de matemáticas para las estudiantes de Ciencias Sociales de la Universidad.

Durante el segundo semestre de 1989 se desarrollaron los primeros prototipos para la parte de Sistemas Formales del primer curso. Estos prototipos fueron evaluados a comienzos de 1990 y dieron lugar a una reflexión a partir de la cual se implementaron algunas pautas a seguir hacia el futuro. En la actualidad, se están produciendo las segundas versiones de estos prototipos y se está comenzando el desarrollo de nuevos didactigrama para otros cursos.

Dado que "una empresa docente" no tenía ninguna experiencia en este campo, este artículo pretende presentar la historia del proyecto con el propósito de hacer un aporte a aquellos profesores o instituciones que piensen desarrollar proyectos similares.

### El problema

La enseñanza de solución de problemas, cuando se habla de resolver problemas dentro del contexto de las matemáticas, se tiende a pensar en los métodos por medio de los cuales es

posible resolver problemas de matemáticas. Los problemas de matemáticas son, en general, problemas sencillos en el sentido de que se encuentran bien definidos y se conocen los datos y las condiciones que debe cumplir una solución para ser válida. Sin embargo, por fuera del contexto de las matemáticas y, tanto en su actividad académica, como profesional, el individuo se encuentra, en general, con otro tipo de problemas. Estos son "problemas complejos", que no se encuentran bien definidos y que contienen una gran cantidad de elementos e interrelaciones entre estos elementos junto con múltiples facetas e información innecesaria. Son "problemas complejos" porque resulta evidente que es necesario simplificarlos para poder encontrar una solución

Este proceso de "simplificación" del problema complejo requiere de la construcción de un modelo del problema dentro del cual sea posible evaluar la bondad de diferentes soluciones al mismo. Se hace por lo tanto necesario desarrollar en el estudiante la capacidad de construir y utilizar modelos para la solución de problemas complejos. Sin embargo, la enseñanza tradicional de las matemáticas, al centrarse en la solución de problemas "sencillos", no permite que el estudiante desarrolle eficazmente esta capacidad.

Los cursos Sistemas formales, informalmente y Matemáticas, Ciencia, Sociedad utilizan algunos aspectos de las matemáticas para desarrollar estas capacidades. Los cursos se centran alrededor de una herramienta de modelaje que se presenta a continuación.

### **La herramienta de modelaje**

El concepto de modelaje que se propone desarrollar dentro de los cursos es sencillo y restringido. Su propósito es el de proponer una herramienta práctica para el análisis de problemas complejos. Esta herramienta supone que se conocen varias alternativas de solución del problema y que se conocen también los criterios de selección que permiten identificar la bondad de los resultados posibles de implementar en cada una de las alternativas de solución. El problema se centra en el hecho de que, al estar analizando un problema complejo, no es posible conocer a priori cuáles son las consecuencias de implementar cada una de las alternativas de solución. Es por ello que se hace necesario producir una simplificación del problema, dentro de la cual se pueda analizar cada una de las alternativas de solución. Esta simplificación del problema la llamamos un modelo.

El modelo contiene únicamente los elementos y las interrelaciones entre estos elementos que son relevantes, tanto al problema en cuestión, como a las alternativas de solución que se desean analizar. Una vez que los elementos y las interrelaciones se han identificado e implementado dentro del modelo, es posible deducir lógicamente las consecuencias de implementar cada una de las alternativas de solución. En este momento, se puede considerar que el problema se ha resuelto, puesto que basta con analizar cada una de las consecuencias de acuerdo con los criterios de selección previamente identificados para determinar la mejor alternativa de solución. El proceso se puede ver en la gráfica siguiente.

## **La estrategia**

El proceso de resolución de un problema complejo a través de un modelo requiere del conocimiento de una herramienta y del desarrollo de un conjunto de capacidades por parte del individuo. Estos son los requisitos que el curso debe satisfacer.

Las herramientas de modelaje. Los cursos proponen tres herramientas de modelaje. Una herramienta inicial sencilla que introduce las principales características del proceso, pero que contiene restricciones. Una segunda herramienta general que elimina las restricciones de la herramienta inicial. Y una herramienta formal que utiliza los conceptos de sistemas formales.

La capacidad de abstracción. El desarrollo de la capacidad de abstracción es central dentro del proceso puesto que es a través de ella que se hace posible identificar los elementos y las interrelaciones relevantes en la construcción del modelo. Esta capacidad de abstracción se desarrolla por medio del estudio de sistemas formales y de las realidades que estos modelan.

La capacidad de análisis y raciocinio lógico. Esta capacidad es necesaria en el manejo interno de los sistemas formales; en el análisis, al interior de un modelo, de las consecuencias de la implementación de una alternativa de solución; y en la construcción de argumentos que permitan sustentar la validez de la solución. Esta capacidad se desarrolla a través del manejo de sistemas formales.

Los requisitos

La estrategia que se acaba de presentar impone ciertos requisitos metodológicos que es necesario lograr si se desean satisfacer los objetivos del curso. Estos requisitos tienen que ver con tres aspectos fundamentales de los cursos:

- El manejo de los conceptos y de las herramientas de sistemas formales
- El desarrollo de la capacidad de abstracción
- El desarrollo de la capacidad de análisis y raciocinio lógico

Es en la búsqueda de estas metas metodológicas que intervienen los didactigramas matemáticos. Como se verá a continuación, los prototipos desarrollados hasta ahora buscan convertirse en herramientas metodológicas complementarias dentro del curso.

## **La filosofía**

El didactograma es una "herramienta metodológica complementaria". Esto significa que los didactogramas tienen sentido únicamente dentro del entorno específico de un curso. Es por ello que los objetivos de un didactograma para un tema particular se determinan a partir de las deficiencias que las herramientas metodológicas tradicionales presentan en el logro de los objetivos pedagógicos del tema.

Lo que se busca con un didactograma es que el estudiante viva una experiencia pedagógica adicional y que, al compartirla dentro de la discusión en clase, le ayude a lograr de manera más eficiente los objetivos del curso. Es por ello que los didactogramas no pretenden ser autosuficientes. Ellos dependen, en todo momento, de las experiencias y los conocimientos

que el estudiante ha adquirido previamente dentro del curso. En consecuencia, el didactigrama no pretende reemplazar al profesor y, en este sentido, tampoco pretende ser "inteligente". El didactigrama es capaz, en general, de reconocer y resaltar los errores más típicos del estudiante y de orientarlo en su solución.

Finalmente, una gran parte de los didactigrama ha sido desarrollada por los mismos profesores del curso. Esto hace parte de la estrategia, pues de esta manera, los didactigrama aportan, tanto a la mejora de los temas que se trabajan, como a la formación pedagógica del profesor.

### **El contenido de los didactigrama**

Hasta el momento se han desarrollado siete prototipos: Concepción y estructura del curso, El acertijo de MU, Adivine la regla, Sistemas formales y lenguaje, Método axiomático, Fractales y Juego de vida. En lo que sigue, se hace una breve descripción del tema, de sus objetivos dentro de los cursos, de los objetivos del didactigrama y de las características del mismo.

#### **Concepción y estructura del curso**

Objetivos del tema. Este no es un tema específico del curso. Sin embargo, se busca que el estudiante conozca el contenido, los objetivos y la metodología de cada uno de los temas del curso, con el propósito de que no se "pierda" dentro del mismo. Por otra parte, se desea que el estudiante pueda reconocer las interrelaciones que existen entre los diversos temas que se estudian en el mismo.

Objetivos del didactigrama El didactigrama busca presentar una herramienta interactiva y eficiente para lograr los objetivos del tema. Se pretende que el estudiante pueda "navegar" por los diferentes temas del curso a través de los tres "planos" pedagógicos principales: los objetivos, el contenido y la metodología.

Características del didactigrama. Este didactigrama se desarrolló en Hypercard. Dentro de un "mapa" que presenta todos los temas del curso, el estudiante o el profesor pueden navegar a través de los tres planos pedagógicos principales. Para cada uno de los temas, el estudiante puede identificar, dentro del mapa, los otros temas del curso que están relacionados con éste.

#### **El acertijo de MU**

Descripción del tema. El acertijo de MU es un juego lexicográfico basado en un sistema formal en que los teoremas son hileras compuestas por letras ( M, I, U). A partir de un axioma predeterminado y de unas reglas de deducción fijas, el estudiante debe tratar de obtener un teorema particular.

Objetivos del tema. Se busca introducir al estudiante en los conceptos de axioma, teorema,

deducción y demostración, dentro de un ambiente atractivo de trabajo en el que él reconoce los conceptos únicamente después de haberlos trabajado y descubierto dentro del juego.

Objetivos del didactigrama. Se busca que el alumno maneje adecuadamente las reglas de deducción del sistema formal, teniendo siempre un control sobre los posibles errores que pueda cometer. Esto no es posible lograrlo en el salón de clase dado que requiere contacto personal entre el profesor y el alumno.

Características principales del didactigrama. Este programa se desarrolló en Hypercard. Hay tres niveles distintos de juego, de acuerdo con la cantidad de reglas mínimas necesarias para demostrar el teorema, escogido aleatoriamente por el computador y propuesto al alumno. El programa conoce las reglas del juego y las aplica donde el alumno le indica.

### **Adivine la regla**

Descripción del tema. Es un juego entre dos personas, al estilo de Picas y Famas. Los elementos son los conceptos y las herramientas desarrolladas en el Acertijo de MU. Cada jugador tiene una regla de deducción desconocida por su contrincante. En turnos alternos cada jugador propone hileras y recibe la información correspondiente a la aplicación de la regla a la hilera propuesta. El objetivo del juego es lograr descubrir la regla del contrincante.

Objetivos del tema. Este juego tiene una relación directa con el método científico. Un jugador puede intentar jugar intuitivamente o puede darse cuenta de que la mejor estrategia consiste en jugar racional

mente: observar, generar hipótesis, experimentar, falsificar o corroborar hipótesis, hasta descubrir la regla general. El propósito de este tema es introducir al estudiante al método científico de una manera práctica, en la que él descubre la necesidad de aproximarse racional y metódicamente a los problemas, para poderlos resolver eficientemente.

Objetivos del didactigrama. El programa busca permitirle al estudiante que juegue el juego con alguien que sabe jugarlo y que se puede adaptar a las capacidades y conocimientos del estudiante; personalizar el juego y guiar al estudiante en el reconocimiento de sus errores; e inducir al estudiante al descubrimiento del método científico.

Características principales del didactigrama. Este programa se desarrolló en Hypercard y Pascal. En el juego el computador tiene escondida una regla que el alumno debe adivinar en un número limitado de intentos. Hay varios niveles de juego de acuerdo con el número de símbolos que use la regla.

### **El método axiomático**

Descripción del tema. En este capítulo se presentan al estudiante reglas de deducción lógicas y se hace énfasis en el aspecto gráfico para representar una demostración dentro de un sistema formal presentado en lenguaje natural.

Objetivos del didactigrama. El propósito del didactigrama es darle al estudiante un medio gráfico con el cual visualizar las demostraciones y además permitir que el estudiante reconozca sus errores, ya que el didactigrama debe estar en capacidad de verificar la validez de los teoremas propuestos por él.

Características del didactigrama. En este didactigrama se utilizan de manera especial las características gráficas del Macintosh, pues está en capacidad de generar los árboles de las demostraciones y permite que el estudiante construya paso a paso estos árboles y verifique la validez de los teoremas que va produciendo. El estudiante puede jugar con distintos temas y, de acuerdo con el nivel en el árbol de deducción, cambia el nivel de juego.

### **Sistemas formales y lenguaje**

Descripción del tema. En este capítulo se introduce al estudiante a una realidad no matemática con el propósito de que él la modele. La realidad a modelar es el lenguaje natural y se busca que el estudiante genere sistemas formales cuyos teoremas se puedan interpretar como frases válidamente construidas en el lenguaje natural.

Objetivos del didactigrama. El programa busca construir un sistema formal que modele una realidad predeterminada; verificar que el sistema formal que se ha construido modela completa y eficientemente esa realidad; extender un sistema formal e identificar la extensión de la realidad que éste modela; y extender la realidad y modificar el sistema formal para que ésta sea modelada.

Características del didactigrama. Este programa se desarrolló en Hypercard y Pascal. El programa presenta las herramientas necesarias para que el estudiante genere el sistema formal que modela, desde el punto de vista de la gramática generativa, un conjunto de frases del lenguaje natural que han sido previamente propuestas. De la misma forma, a partir de un sistema formal propuesto, el programa induce al estudiante a identificar el subconjunto del lenguaje natural que éste modela. Este programa tiene un gran nivel de interacción y de reconocimiento de los errores del estudiante.

### **Fractales**

Descripción del tema. Los fractales es un tema matemático de gran actualidad. Dentro de los cursos se presentan fractales determinístico producidos dentro de un ambiente restringido.

Objetivos del tema. Los fractales presentan una nueva realidad que es posible modelar a través de los sistemas formales. Se busca que el estudiante sea capaz de pasar de la realidad al modelo y de éste a la realidad de manera natural a través de un lenguaje de interpretación. Objetivos del didactigrama. El programa busca darle al estudiante una herramienta eficiente para el dibujo y el análisis de los fractales y presentar un entorno en el cual sea claro el proceso de modelaje de una realidad gráfica.

Características del didactigrama. Este programa se desarrolló en Hypercard. Presenta claramente, en dos módulos separados, el paso de los fractales a los sistemas formales que los modelan y de los sistemas formales a los fractales modelados por estos. El programa reconoce los errores típicos del estudiante.

## **El juego de la vida**

Descripción del tema. El juego de la vida es un juego que modela, por medio de una presentación gráfica, algunos aspectos del desarrollo de una especie.

Objetivos del tema. El propósito de este tema es el de presentarle al estudiante un sistema formal que modela una realidad biológica. Se busca también que el estudiante analice un conjunto de sistemas formales en los que las reglas de deducción permanecen inmutables, mientras que es posible cambiar el único axioma.

Objetivos del didactigrama. El objetivo de este programa es proporcionarle al estudiante una herramienta para el análisis del juego de vida en la cual él pueda identificar algunas de las características generales del mismo.

Características del didactigrama. El didactigrama permite al estudiante analizar diversas generaciones de una misma configuración inicial y busca que el estudiante desarrolle su capacidad de aplicar el sistema formal para identificar la siguiente generación a una configuración dada.

## **La reflexión**

Una vez producidos los primeros siete prototipos de didactigrama, llevamos a cabo una reflexión general sobre la experiencia vivida. En este sentido, hay que aclarar de nuevo que esta experiencia era completamente nueva para nosotros y que, aunque algunos miembros del grupo tenían conocimiento sobre programación, éramos completamente novatos en el tema de materiales educativos computarizados. La reflexión que hicimos nos permitió identificar algunos de los errores cometidos.

Es esencial que el problema esté bien definido. Esto quiere decir que el tanto el contenido, como los objetivos pedagógicos del tema dentro del curso deben ser conocidos en detalle. Pero, además, que exista realmente un problema que el didactigrama pueda resolver. Esto es, que las herramientas metodológicas tradicionales como el texto y el profesor no sean suficientes para lograr los objetivos pedagógicos y que el computador ofrezca realmente una ventaja comparativa para llenar este vacío. En general, el error más grave que se puede cometer es resolver, por medio de un didactigrama, un problema que realmente no lo es.

El grupo inicial de desarrollo estaba compuesto por seis personas. Esto produjo un problema de administración, puesto que dificultaba el proceso de comunicación y discusión de las propuestas de los integrantes.

Como todos aquellos que tienen experiencia en desarrollo de materiales educativos computarizados lo saben, el proceso de diseño es el más importante. La presión que imponía el propósito de tener unos prototipos funcionando en unos pocos meses nos indujo a cometer el error de no analizar y discutir en profundidad todos los diseños que se proponían.

Por otra parte, comenzamos a trabajar sin conocer suficientemente la herramienta de desarrollo. De esta forma, algunos programas fueron ineficientes y la calidad de programación heterogénea tanto al interior de un programa, como entre los programas mismos. Sin embargo, no habría sido posible desarrollar los programas en el plazo logrado, i no hubiésemos tenido a Hypercard como la herramienta común de desarrollo.

Se hizo demasiado énfasis en utilizar únicamente Hypercard como herramienta de desarrollo. Más tarde descubrimos que algunas de las cosas que hicimos habrían podido hacerse de manera más eficiente con otras herramientas. De la misma forma, descubrimos muy tarde los XCOMMANDS de Hypercard que nos habrían permitido avanzar más rápidamente.

No se definió una estructura general para los programas. Cada quien los desarrolló a su manera y esto aportó a la heterogeneidad de los mismos. Adicionalmente, aunque se intentó proponer una interfaz común a los programas, esta no se desarrolló suficientemente y cada integrante introdujo su propia interfaz.

Tal vez el mayor error que cometimos fue el de intentar resolver problemas demasiado complejos desde un comienzo. Esto dificultó la definición del problema e introdujo muy temprano problemas técnicos que habríamos preferido evitar.

Finalmente, reconocimos el valor de la experiencia. Por una lado, nos dimos cuenta del "saber hacer" que tiene el grupo de Informática Educativa del Departamento de Ingeniería de Sistemas de los Andes. Por otro lado, aunque el proceso fue difícil, al tener que enfrentar todos los problemas, nosotros aprendimos muchas cosas. Esto aportó no solamente al desarrollo posterior de la segunda versión, sino que también aportó a la calidad de los temas dentro de los cursos y a la formación de los profesores que participaron en el proyecto.

## El futuro

Actualmente nos encontramos desarrollando la segunda versión de los primeros prototipos. Por otra parte, se están desarrollando la primera versión de los siguientes didactigrama.

- Modelaje de una situación real. Este didactigrama pretende ofrecer al estudiante una herramienta para el modelaje de problemas complejos. A través de una interfaz similar a la de Stella, el programa permite construir un modelo gráfico de cualquier problema, una vez que se han identificado los elementos relevantes del mismo y que el estudiante conoce las interrelaciones entre ellos.
- El casino. Este programa le permite al estudiante simular cuatro juegos tradición males de casino. Con él, el estudiante tiene una experiencia directa con el azar. El programa le permite generar las tablas necesarias para hacer un análisis de probabilidad de los resultados.
- Conteo. Este programa induce al estudiante a reconocer las características de los principales problemas de conteo.
- Concepción y estructura de Matemáticas, Azar, Sociedad. Se está desarrollando la



segunda versión de este programa.

**Hacia el futuro se tiene pensado desarrollar dos programas.**

- El diccionario y el recetario. Este programa pretende presentar una herramienta para el conocimiento y el manejo de los conceptos y de los procesos de resolución de problemas dentro de un curso. Inicialmente se desarrollará para la parte de estadística del curso Matemáticas, Azar, Sociedad.
- Una herramienta de muestreo. Este programa presentará una herramienta de muestreo con la cual el estudiante reconocerá las principales características de cada una de las distribuciones de probabilidad.

Un ejemplo de un "problema complejo" es la elección de una profesión por parte del estudiante que va a comenzar sus estudios universitarios. Se conocen las alternativas de solución y el estudiante puede determinar los criterios de selección de las consecuencias de cada alternativa, puesto que puede definir en qué situación desearía encontrarse durante su vida profesional